Multinomisk fordeling.

Eksempel. Feil på ei maskin kan vere av 3 typar: elektriske, mekaniske eller operatørfeil.

La A ~ elektrisk feil

B ~ mekanisk feil

C ~ operatør feil

Ut av n feil la

X_1 ~ talet på gonger A skjer, $P(A) = p_1$

X_2 ~ —"— B skjer $P(B) = p_2$

X_3 ~ —"— C skjer $P(C) = p_3$

Vi har alltid $x_1 + x_2 + x_3 = n$ og $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} \cdot \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \cdot \frac{\overset{x_3!}{(n-x_1-x_2)!}}{x_3!\,\underset{0!}{(n-x_1-x_2-x_3)!}} p_1^{x_1} p_2^{x_3} p_3^{x_3}$$

$$= \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

Generelt $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \dfrac{n!}{x_1!\,x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$

5.3 Hypergeometrisk fordeling

Eks. Eit buss-selskap har 24 bussar der 4 stykker har alvorlege manglar. Ved inspeksjon blir 2 bussar plukka ut.

Situasjon 2 forsøk

Reg defekt / ikkje defekt

$P(\text{defekt}) = \frac{1}{6}$ i kvart forsøk

$$P(\underbrace{\text{defekt i 1. forsøk}}_{D1}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{defekt i 2. forsøk}) = P(D1 \cap D2) + P(D1^c \cap D2)$$

$$= \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} + \frac{20}{24} \cdot \frac{4}{23} = \frac{92}{24 \cdot 23} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

Uavh ? $P(D_2 | D_1) = \frac{3}{23} \neq P(D_2) \rightarrow$ D_1 og D_2 ikkje uavh.

G1 G2
20 4

$$P(\text{ingen defekt}) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{20}{2}\binom{4}{0}}{\binom{24}{2}} = \frac{19 \cdot 20}{24 \cdot 23} = \frac{95}{138}$$

$$P(1 \text{ defekt}) = \frac{\binom{20}{1}\binom{4}{1}}{\binom{24}{2}} = \frac{20 \cdot 4}{\frac{24 \cdot 23}{2}} = \frac{40}{138}$$

$$P(2 \text{ defekte}) = \frac{\binom{20}{0}\binom{4}{2}}{\binom{24}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{24 \cdot 23} = \frac{3}{138}$$

Generelt

Har N stykker der k er av type A og $N-k$ er av typen A'. Trekker ut n stykker. La X vere av type A. Då er X hypergeometrisk fordelt og

$$P(X=x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = h(x, N, n, k), \quad \cancel{x = 0, 1, 2}, \ldots$$

$$\max\{0, n-(N-k)\} \leq x \leq \min(n, k)$$

Viktig ved kvalitetskontroll, spørjeundersøkingar

Forventingar og varians til X

La $I_j = \begin{cases} 1 & \text{dersom } A \text{ skjer i } j\text{-te forsøk} \\ 0, & \text{elles} \end{cases}$

Då er $X = \sum_{j=1}^{n} I_j$ der $E[I_j] = \frac{k}{N}$

$\Rightarrow E[X] = \frac{nk}{N}$.

Det kan visast at

$$Var[X] = \frac{N-n}{N-1}\frac{nk}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

Teorem 5.2

NB!. Ved trekning med tilbakelegging blir X binomisk fordelt med parameter N og $p = \frac{k}{N}$

<u>Observerer</u> $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Binomisk} & \text{Hypergeometrisk} \\ \mu = np & n\left(\frac{k}{N}\right) \\ \sigma^2 = np(1-p) & \frac{N-n}{N-1}\,\frac{nk}{N}\left(1-\frac{k}{n}\right) \end{array} \right.$

∴ dersom $N \gg n$ så er formlane for varians ≈ like

sidan $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$

∴ Dersom $N \gg n$ så kan hypergeometrisk fordeling tilnærmast med binomisk fordeling.

<u>Eks.</u> Tippekupongen: $3^{12} = 531441$ mogelege rekkjer.

1 rekkje gjev 12, $\binom{12}{11} \cdot 2 = 24$ rekkjer gjev 11 og $\binom{12}{10} \cdot 4 = 264$ gjev 10.

∴ 289 rekkjer gjev gevinst og $531441 - 289 = 531152$ gjev ikkje. Tippar n rekkjer. X = talet på gevinst.

$$P(X=x) = \frac{\binom{289}{x}\binom{531152}{n-x}}{\binom{531441}{n}}$$

$$n \ll 531441 \Rightarrow P(X=x) \approx \binom{n}{x}\left(\frac{289}{531441}\right)^x\left(1-\frac{289}{531441}\right)^{n-x}$$

$$P(\text{gevinst}) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{531152}{531441}\right)^n > \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow n(\ln 531441 - \ln 531152) > \ln 2 = 0.6931$$

∴ $n \geq 1274$

5.4 Geometrisk fordeling

Situasjon: Uavhengige forsök

Reg A/A'

$P(A) = p$ i kvart forsök

La X vere talet på forsök til A skjer 1. gong.

$$P(X=k) = P(\underbrace{A' \cap A' \cap \cdots \cap A'}_{k-1} \cap A) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Kast med mynt, terning

Eks. Eliteserien i fotball.

Kor mange kampar må eit lag spele før det vinn ein kamp.

Fordelingsfunksjonen

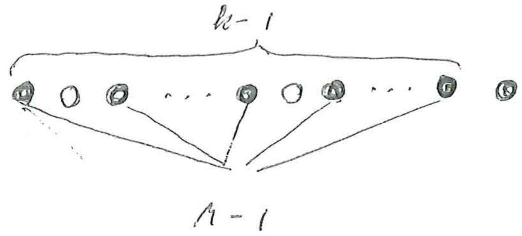
$$F_X(k) = P(X \leq k) = 1 - P(X \geq k+1) = 1 - (1-p)^k$$

$$E[X] = \frac{1}{p}, \quad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}.$$

Negativ binomisk fordeling

Situasjon. Same som for geometrisk fordeling

La X vere talet på forsök til A skjer ~~1. gong~~ for r-te gong.



$B(k-1, p)$

$P(X=k) = P(A \text{ skjer } n-1 \text{ gonger i } k-1 \text{ forsøk} \cap A \text{ skjer i } k\text{-te forsøk})$

$$= \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{k-1-(n-1)} \cdot p$$

$$= \binom{k-1}{n-1} p^{n} (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots$$

Samanheng geometrisk og negativ binomisk.

La X_1 vere talet på forsøk til A skjer 1. gong

La X_2 vere talet på tilleggsforsøk –"– 2. gong

⋮

La X_n vere talet på forsøk fra A skjer $(n-1)$-te gong til A skjer n-te gong

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_1, \dots, X_n$ er geometrisk fordelt og uavh.

$\Rightarrow E[X] = \frac{n}{p}$ og $Var[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}$